Übersicht über statistische Begriffe zur Vorlesung

(diskret)

Die wichtigsten Begriffe:

1) Erwartungswert
2) Varianz / Standardabweichung
3) Stichprobenvarianz
4) Kovarianz
5) Korrelationskoeffizient
6) Unabhängigkeit vs. Unkorreliertheit

Erläuterungen und Rechnungen im Anhang.

Zu 1)

Ganz allgemein:
Wenn g(X) eine eindeutige Funktion der Zufallsvariablen X ist, so ist auch g(X) eine Zufallsvariable. Als ihr Erwartungswert wird im diskreten Fall definiert:

$$E[g(X)] = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot g(x_k).$$

Den Erwartungswert der Zufallsgröße X selbst erhält man mit g(X)=X zu

$$\mu_X = E[X] = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k .$$

Beispiel siehe Anhang: [i]
In der Vorlesung betrachten wir die den Erwartungswert eines Portfolios mit Anteilen x_i in Aktie i investiert und den Renditen r_i:

$$E[X] = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_i .$$

Bem.: Die Renditen in unserem Portfolio sind somit schon Erwartungswerte.

Der Erwartungswert ist in n Variablen, d.h. $E[X] = \mu = x_1 \cdot r_1 + x_2 \cdot r_2 + ... + x_n \cdot r_n$.
Betrachte im folgenden den Fall für
n=1: $E[aX + b] = a \cdot E[X] + b$, Beispiel dazu siehe Anhang: [ii]
und n=2: $E[aX + bY] = a \cdot E[X] + bE[Y]$, Beispiel dazu siehe Anhang: [iii]

Zu 2)
Die Varianz ist die mittlere quadratische Abweichung
$V[X] = \sigma^2 = E[X - E(X)]^2$,

oder nach dem Satz von Steiner :
$V[X] = \sigma^2 = E[X^2] - [E(X)]^2$.

Die Standardabweichung ist die positive Quadratwurzel der Varianz
$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Zu 3)

Mit dem arithmetischen Mittel der Verteilung $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ lautet die Stichprobenvarianz mit n-1 Freiheitsgraden:

$$S^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

Es gilt: $E[S^2] = \sigma^2$, damit ist S² ein unverzerrter Schätzer für die Varianz σ^2.
Beweis siehe Anhang: [iv]

Zu 4)
Die Kovarianz ist ein Maß für den linearen Zusammenhang von X und Y und lautet:

$$Cov(X,Y) = \sigma_{X,Y} = E\left[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))\right] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$$

Zu 5)
Der Korrelationskoeffizient ist auf das Intervall [-1,1] normiert und hat die folgende Form

$$Corr(X,Y) = \rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

Aus 5) ergibt sich die Umformung, die in den Übungen verwendet wird:

$$Cov(X,Y) = \sigma_{X,Y} = \rho_{X,Y} \cdot V(X) \cdot V(Y) \Leftrightarrow Cov(X,Y) = \rho_{X,Y} \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y$$

Zu 6)
Aus der Unkorreliertheit folgt i.a. noch nicht, dass die Zufallsvariablen auch unabhängig sind. Dies ist nur bei symmetrischen Verteilungen wie z.B. der Normalverteilung der Fall.

Anhang:

---

[i] Ein *Beispiel* dafür ist der Erwartungswert einer Verteilungsfunktion P (X = x_i) im diskreten Fall:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

[ii] *Beispiel zu Folie 8* aus Risiko und Ertrag:

Geg.: Diskrete Zufallsvariable X mit Dichte f(x),
und die Konstanten a und b.

Zu zeigen: $E[aX + b] = a \cdot E[X] + b$

Lsg.:

$$\begin{aligned} E[aX + b] &= \sum_{i=1}^{m} (ax_i + b) \cdot f(x_i) \\ &= \sum_i ax_i f(x_i) + bf(x_i) \\ &= a\sum_i x_i f(x_i) + b\sum_i f(x_i) \\ &= aE[X] + b. \end{aligned}$$

q.e.d.

Analog lässt sich der Zusammenhang für die Varianz $V[aX + b] = a^2 \cdot V[X]$ zeigen.

[iii] Ebenso für die Varianz: $V[aX + bY] = a^2 \cdot V[X] + b^2 V[Y] + 2 \cdot a \cdot b \cdot Cov(X,Y)$

$$\Leftrightarrow V[aX + bY] = a^2 \cdot V[X] + b^2 V[Y] + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot \rho_{X;Y}$$

[iv] *Rechnung dazu:*

$$E[S^2] = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2\right]$$

$$= \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2\right]$$

$$= \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n}\sum_i E[(x_i - \bar{x})^2] = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n}\sum_i E[(\{x_i - \mu\} - \{\bar{x} - \mu\})^2]$$

mit Binomischer Formel und $E[(\bar{x} - \mu)] = \frac{\sigma}{n}$ folgt

$$E[S^2] = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n}\left[n \cdot \sigma^2 + \frac{n\sigma^2}{n} - 2 \cdot E[(\bar{x} - \mu)\sum(x_i - \mu)]\right]$$

$$= \frac{n}{n-1}\left[\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2\sigma^2}{n}\right] = \frac{n}{n-1}\left[1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n}\right]\sigma^2 = \sigma^2.$$

q.e.d.